

Dans ce chapitre, on utilisera régulièrement **l'abus de notation** $y = y(x)$ pour une fonction y , qui confond la fonction y avec son image $y(x)$. On veillera d'autant plus à bien comprendre de quel objet on parle lors des calculs !

I Ordre 1

$$y' + ay = c$$

Soient $a, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un **intervalle** ouvert I . On considère l'équation différentielle

$$y' + ay = c \quad \text{sur } I$$

où on rappelle que ceci un abus de notation pour désigner l'équation :

$$y'(x) + a(x)y(x) = c(x) \quad \forall x \in I$$

Si $c \neq 0$, (i.e. si l'équation n'est pas homogène), cette résolution se fait en plusieurs étapes

- **recherche des solutions de l'équation homogène** $y' + a(x)y = 0$
- **recherche d'une solution particulière.**
- **Constitution des solutions générales avec le principe de superposition.**
- **Éventuellement recherche de solutions particulières avec "condition initiale".**

sachant que l'ordre dans lequel sont traitées ces étapes, ainsi que la méthode utilisée, peut dépendre des données du problème ! Il faut donc bien lire l'énoncé avant de se lancer dans une résolution générale... Revoyons tout ceci ci-dessous.

Résolution d'une équation homogène $(E_0) : y' + a(x)y = 0$

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ est

$$S_0 = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = \lambda \underbrace{e^{-A(x)}}_{y_0(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

où A est une primitive quelconque de a sur I .

■ Exemple 1 :

On cherche les fonctions réelles y, C^1 sur $]0; +\infty[$ vérifiant

$$y'(x) = \frac{1}{2x}y(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $a(x) = -\frac{1}{2x}$ est $A(x) = -\frac{1}{2} \ln x$, ainsi, les solutions sont toutes les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2} \ln x} = \lambda \sqrt{x}, \quad \text{où } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation générale $(E) : y' + a(x)y = c(x)$, où $c \neq 0$

Dans tous les cas, il nous faut résoudre l'équation homogène.

Nous avons ensuite besoin d'au moins une solution de l'équation générale, que l'on appellera "solution particulière". Notons la ici y_p . Si l'énoncé ne nous fait pas calculer de solution particulière, il faut aller en chercher une :

- **Si a et c sont constants**, il existe également une solution particulière constante (cf ci-dessous)
- **Si a et c sont des polynômes avec $\deg a \leq \deg c$** , on pourra tenter de chercher une solution y_0 polynômiale, mais on n'est pas certain d'en trouver une. (cf ci-dessous)
- **Dans les autres cas**, on pourra tenter la méthode de variation de la constante. Il existe toujours une solution, mais on n'est pas forcément certain de pouvoir l'expliquer. (cf ci-dessous)

Une fois une solution trouvée, on appliquera le principe de superposition :

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S_0 = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y(x) = \lambda e^{-A(x)} + y_p(x), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- **Si a et c sont constants :**

Il existe une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{c}{a}$.

Analyse : Supposons que y_p soit une fonction constante. Alors, $y'_p = 0$. Ainsi,

$$y_p \text{ est solution de l'équation } (E) \Leftrightarrow ay_p = c \Leftrightarrow y_p = \frac{c}{a}$$

Synthèse : Par les équivalents précédents, il existe bien sur une fonction constante y_p qui répond à l'équation.

- Si a et c sont des polynômes non nuls :

Supposons $y_p = P$ un polynôme donné. On note $n = \deg P$.

Analyse :

$$y_p \text{ est solution de ce l'équation (E)} \Leftrightarrow P' + aP = c$$

Equation aux degrés :

De l'équation précédente, on tire

$$\deg(P' + aP) = \deg c$$

Or, comme $\deg P' < \deg P$, on a

$$\deg(P' + aP) = \deg P + \deg a$$

D'où :

$$\begin{cases} \deg P = \deg c - \deg a & \text{si } \deg a \leq \deg c \\ \text{une contradiction} & \text{sinon} \end{cases}$$

On réinjecte :

Si on arrive à une contradiction, c'est qu'une telle solution est impossible. Sinon, on récupère le degré obtenu et on passe à un calcul plus précis. (cf. ci-dessous)

■ Exemple 2 :

Déterminer une solution polynomiale de l'équation (E) : $y' + xy = x^2 + 1$:

Soit P un polynome. On note n son degré.

$$P \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \underbrace{P' + xP}_{\text{de degré } n+1} = \underbrace{x^2 + 1}_{\text{de degré } 2}$$

Ainsi, $n+1 = 2$ et donc $n = 1$. On peut donc poser $P = \alpha x + \beta$. Alors

$$\begin{cases} P \text{ est solution} & \Leftrightarrow \alpha + x(\alpha x + \beta) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \alpha = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ce qui est possible dès que $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Ainsi, la fonction $y_p = x$ est solution de l'équation.

■ Exemple 3 :

Existe-t-il une solution polynomiale à l'équation (E) : $y' + xy = x^2$:

Ici, " $\deg a < \deg c$ ", mais néanmoins, il n'existe pas de solution polynomiale : Avec les mêmes arguments et notations que pour l'exemple ci-dessus, on arrive à

$$\begin{cases} P \text{ est solution} & \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \alpha = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ce qui est impossible car on aurait $\underbrace{1}_{\text{coeff dominant}} = \underbrace{\alpha}_{\text{coeff constant}} = 0$, ce qui est contradictoire. Il n'existe donc en effet pas de solution polynomiale à cette équation.

- Recherche d'une solution particulière de (E) par Méthode de Variation de la Constante (MVC)

On recherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x) e^{-A(x)}$ pour tout $x \in I$, avec λ une fonction dérivable sur I .

Analyse : Si on réinjecte y_p dans l'équation (E), on trouve un candidat pour λ tel que

$$\text{Démonstration :} \quad \lambda'(x) = c(x) e^{A(x)}.$$

on a, pour $x \in I$, $y_p'(x) = \lambda'(x) e^{-A(x)} - \lambda(x) a(x) e^{-A(x)} = \lambda'(x) e^{-A(x)} - a(x) y_p(x)$.
D'où

$$y_p' + a y_p = c \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) e^{-A(x)} = c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = c(x) e^{A(x)}$$

□

Synthèse : On choisit λ une primitive quelconque de $x \mapsto c(x) e^{A(x)} = \frac{c(x)}{y_0(x)}$.

On vérifie que $y_p(x) = \lambda(x) e^{-A(x)}$ est une solution particulière de (E) sur I .

■ Exemple 4 :

Résolvons l'équation $y'(x) = \frac{1}{2x} y(x) + 2$ sur $x \in]0; +\infty[$.

D'après la résolution précédente, on sait déjà que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \sqrt{x}, \quad \text{où } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Utilisons maintenant la MVC pour déterminer une solution particulière. Posons $y_p(x) = \lambda(x) \sqrt{x}$ où λ est une fonction $\mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$.

Alors,

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution particulière} & \Leftrightarrow y_p' = \frac{1}{2x} y_p + 2 \\ & \Leftrightarrow \dots \text{ (calcul, cf ci-dessus)} \\ & \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\lambda(x) = 4\sqrt{x} \quad \text{convient}$$

Autrement dit, une solution particulière est :

$$y_p : x \in]0; +\infty[\mapsto \lambda(x) \sqrt{x} = 4x$$

D'où, par principe de superposition, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation :

$$x \in]0; +\infty[\mapsto \lambda \sqrt{x} + 4x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Équation avec condition initiale

La recherche de ces solutions se fait toujours **après** avoir résolu l'équation dans son intégralité...

■ Exemple 5 :

Résoudre l'équation $y'(x) = \frac{1}{2x}y(x) + 2$ sur $x \in]0; +\infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 5$.

L'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions

$$x \in]0; +\infty[\mapsto \lambda\sqrt{x} + 4x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit y une de ces fonctions. Alors :

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow \lambda\sqrt{1} + 4 = 5 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

D'où la (seule) solution avec condition initiale $y(1) = 5$:

$$x > 0 \mapsto \sqrt{x} + 4x$$



Remarque :

Dans le cadre des équations différentielles d'ordre 1, une condition initiale amenera toujours à une seule solution (au maximum). à méditer...

II Ordre 2 à coefficients constants $ay'' + by' + cy = d(x)$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur un **intervalle** ouvert I . On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = d$$

C'est-à-dire que l'on cherche l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2(I)$ vérifiant l'équation. Les étapes sont les mêmes que pour l'ordre 1.

Résolution de l'équation homogène $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$

On pose l'équation caractéristique

$$(C) \quad ar^2 + br + c = 0$$

On note Δ le discriminant de C .

Théorème

- Si $\Delta > 0$, on note r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes de (C),

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} y : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} \right\}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, on note r_1 la seule solution (réelle) de (C),

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} y : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_1 x} \end{array} \right\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, on note $r = \alpha + i\beta$ une solution de (C), $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} y : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) \end{array} \right\}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Commentaires : On remarque qu'une conséquence de ce théorème est que l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension 2. On le note $\mathcal{S}_0$.

■ Exemple 6 :

Résolvons l'équation

$$(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

de racine double

$$r = -1$$

L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ de (E_0) est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Solution particulière y_p de (E) si d est une constante

Pour une **constante** d et une équation sous la forme

$$ay'' + by' + cy = d$$

Une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto \frac{d}{a}$$

(facile à vérifier !)

Solution particulière y_p de (E) si $d(x) = P(x)e^{\beta x}$

Supposons que $d(x) = P(x)e^{\beta x}$, où β est réel et P est un polynôme réel. Alors on cherche une solution particulière $y_p(x) = Q(x)e^{\beta x}$ de la manière suivante :

★ Analyse : Recherche du degré de Q :

$$\begin{aligned} y_P \text{ est sol. part.} &\Leftrightarrow ay_P'' + by_P' + cy_P = Pe^{\beta x} \quad \forall x \\ &\Leftrightarrow \dots \text{ calcul} \\ &\Leftrightarrow e^{\beta x} (aQ'' + (2a\beta + b)Q' + (\beta^2 + b\beta + c)Q) = Pe^{\beta x} \quad \forall x \\ &\Leftrightarrow aQ'' + \underbrace{(2a\beta + b)}_B Q' + \underbrace{(\beta^2 + b\beta + c)}_C Q = P \end{aligned}$$

Le degré de P est donc également celui de l'expression $aQ'' + BQ' + CQ$. Comme on a

$$\deg Q \geq \deg Q' \geq \deg Q'',$$

on a

$$\begin{cases} \text{si } C \neq 0, \deg Q = \deg P \\ \text{si } C = 0 \text{ mais } B = 0, \deg Q' = \deg P \\ \text{si } C = B = 0, \text{ comme } a \neq 0, \deg Q'' = \deg P \end{cases}$$

En bref (HP) : ceci pourrait se traduire de la manière suivante en terme de polynôme caractéristique :

$$\deg Q(x) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \beta \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique.} \\ \deg P + 1 & \text{si } \beta \text{ est racine simple du polynôme caractéristique.} \\ \deg P + 2 & \text{si } \beta \text{ est racine double du polynôme caractéristique.} \end{cases}$$

★ Synthèse : Recherche d'une solution s'écrivant sous la forme proposée :

On pose $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec n le degré trouvé précédemment et on procède par équivalence pour déterminer y_p comme solution de l'équation :

y_P solution **ssi** ...

on pourra ainsi reprendre et poursuivre les calculs effectués dans la partie "analyse" en l'appliquant au degré trouvé.

■ Exemple 7 :

On considère l'équation

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

On propose de trouver une solution particulière sous la forme $y_P = Qe^{-x}$ où Q est un polynôme réel.

On a

$$y_P = Q'e^x - Qe^{-x} = (Q' - Q)e^x, \quad y_P'' = (Q'' - 2Q + Q)e^{-x}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_P \text{ est sol. part.} &\Leftrightarrow y_P'' + 2y_P' + y_P = xe^{-x} \quad \forall x \\ &\Leftrightarrow \dots \text{ calculs} \\ &\Leftrightarrow Q'' + 0 \cdot Q' + 0 \cdot Q = x \quad (*) \end{aligned}$$

On obtient alors $\deg Q'' = \deg x = 1$, d'où

$$\deg Q = 3.$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_P(x) = (a + bx + cx^2 + dx^3)e^{-x}$$

Ainsi, d'après (*) et avec $Q'' = 2c + 6x$, y_P est solution de (E) ssi pour tout x :

$$2c + 6dx = x$$

i.e. ssi

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

les a, b pouvant être choisis de manière quelconque. On sait donc qu'on a comme solution particulière la fonction y_P telle que

$$y_P : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 e^{-x}$$



Remarque :

Dans l'exemple précédent, l'ensemble des **fonctions** $y = (a + bx)e^{-x}$ **étant déjà solutions de l'équation homogène**, en réalité, on pouvait poser, dès lors qu'on a su que $\deg Q = 3$ la proposition

$$y_P(x) = (cx^2 + dx^3)e^{-x} \quad \text{au lieu de} \quad y_P(x) = (a + bx + cx^2 + dx^3)e^{-x}$$

(la partie $(a + bx)e^{-x}$ n'apportant aucune contribution au second membre.)

Solution particulière y_p de (E) si $d(x) = P(x)$

C'est tout simplement un cas particulier du cas précédent, avec $\beta = 0$. En effet,

$$d(x) = P(x)e^{0x}$$

On peut donc proposer une recherche de solution sous forme polynomiale par exemple.

Principe de superposition : solution particulière y_p de (E) si $d(x) = d_1(x) + d_2(x) + \dots$

Si y_1 est solution de $ay'' + by' + cy = d_1$ et y_2 est solution de $ay'' + by' + cy = d_2$, alors

$$y_P = y_1 + y_2$$

est solution de $ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$. (Facile à montrer !)

■ Exemple 8 :

On souhaite trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) : y'' + 2y' + y = x(e^{-x} + e^x) + 1$$

On connaît déjà l'ensemble des solutions de l'équation homogène par un exemple précédent :

$$S_0 = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

★ Recherche d'une solution particulière de $(E_1) : y'' + 2y' + y = xe^{-x}$:

Dans un exemple précédent, on a trouvé $y_1(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$.

★ Recherche d'une solution particulière de $(E_2) : y'' + 2y' + y = xe^x$:

Le même type de recherche que précédemment donne une solution particulière :

$$y_2 : x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)e^x.$$

★ Recherche d'une solution particulière de $(E_3) : y'' + 2y' + y = 1$:

Le second membre est constant, une solution particulière est donc y_3 avec

$$y_3(x) = 1$$

★ En conclusion, une solution particulière de (E) est

$$y_P(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x + 1$$

Solution générale de (E)

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation $(E) : ay'' + by' + cy = d$ est

$$\mathcal{S} = S_0 + y_P(x)$$

■ Exemple 9 :

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : y'' + 2y' + y = x(e^x + e^{-x}) + 1$$

Les exemples précédents nous permettent d'affirmer que l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} + \underbrace{\frac{1}{6}x^3e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x + 1}_{y_P(x)}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Recherche de la (ou des) solution(s) avec conditions initiales :

On rappelle que la recherche de ces solutions se fait toujours **après** avoir résolu l'équation dans son intégralité. . . Ainsi, si y est solution de (E) avec une ou plusieurs conditions initiales, il faudra ensuite résoudre le système associé.

■ Exemple 10 :

Résoudre l'équation

$$(E) : y'' + 2y' + y = x(e^x + e^{-x}) + 1, \quad \text{sachant que } y(0) = 1$$

L'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions obtenues dans l'exemple précédent :

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} + \underbrace{\frac{1}{6}x^3e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x + 1}_{y_P(x)}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Or, pour y de la forme ci-dessus :

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + \mu 0)e^{-0} + 0e^{-0} + \frac{1}{4}(0-1)e^0 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{4} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

En conclusion, les solutions de (E) avec la condition initiale demandée sont :

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto (\mu x - \frac{1}{4})e^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x + 1, \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}$$



Remarque :

Si on veut fixer λ et μ , il faut au moins 2 conditions initiales dans le cadre des équations d'ordre 2...*(à méditer)*...

Avec une seule condition initiale, il se peut que l'on n'obtienne pas une valeur directe de λ ou μ , mais plutôt une condition reliant λ et μ .

■ Exemple 11 :

Résoudre l'équation précédente avec cette fois-ci la condition initiale $y(1) = 1$ et non plus $y(0) = 1$.

On reprend les notations précédentes. Alors

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + \mu)e^{-1} + \frac{1}{6}e^{-1} + 0e^1 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu + \frac{1}{6})e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = -\lambda - \frac{1}{6}$$

En conclusion, les solutions de (E) avec la condition initiale demandée sont :

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\lambda - (\lambda + \frac{1}{6})x \right) e^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x + 1, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$